EXAMEN FINAL ENX. CIVIL MAYO 2012

j.m.rivas ACADEMIA

1. Dominio de $h(x,y)=\sqrt{y^2-x^2}$

2. Conxunto $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x>y\}$ é un conxunto:

   ☐ Pechado ☐ Aberto ☐ N.A.N.P. ☐ A. e P.

3. Puntos críticos da función $f(x,y)=2x^2+y^4+4xy-1$ (Utiliza $\nexists$ no caso de que non exista algún deles).

4. Dados $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=x^2-y^2+1$ e $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$, calcula os extremos de f en D e o valor da función neles.

6. Escribe unha integral cuxo resultado sexa o volume da parte da rexión V que está embaixo da superficie S, onde $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2\le 4, z\ge 0\}$ e $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2=(z-2)^2, z\ge 0\}$. Escribe tamén o resultado da integral (volume indicado).

7. Unha partícula de masa m móvese seguindo a traxectoria $\sigma:[0,3\pi]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ definida por $\sigma(t)=(sent, cost, 4t)$. Calcula a forza F que actúa sobre a partícula no intre $t=\pi$

8. Sexa $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ un campo escalar e $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial. Utiliza CE, CV, EN.

   a) div f b) ∇ f c) rot F

   d) $\nabla.\nabla$ f e) ∇ x ∇f f) div F

10. ¿ Qué cuádrica é o soporte da superficie paramétrica $\Phi:[-1,1]x[0,2\pi]\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $\Phi(u,v)=(ucosv, u\,senv+2, u+1)$? Escribe a súa ecuación en coordenadas cartesianas.

11. Escribe unha integral que mida a área da cuádrica anterior con $0\le z\le 1$

12. Calcula a lonxitude l do camiño máis curto para ir do punto (0,0) ao (1,3) ao longo da curva de ecuación $y^2=10x-x^2$

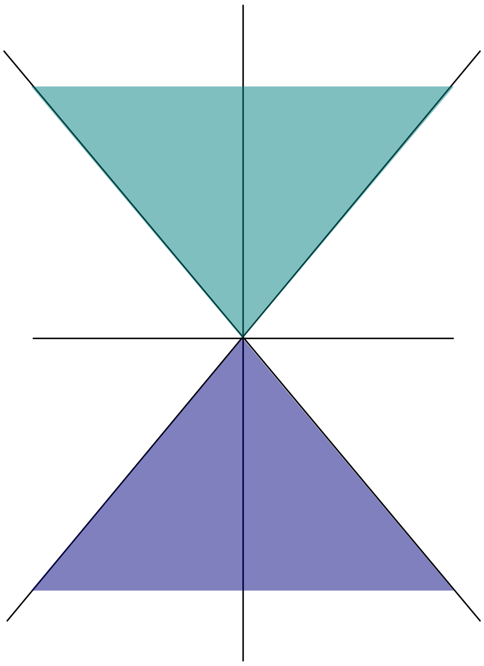
13. Un arame ten a forma da curva $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=4, y\geq 0\}$. Calcula a masa m do arame se a densidade linear en cada punto (x,y) do arame é o dobre da distancia do punto ao eixo de abcisas.

14. Calcula o traballo T realizado polo campo de forzas $F(x,y,z)=(y,x,2y)$ sobre unha partícula que percorre a curva intersección das superficies $x^2+y^2=4$ e $x+z=1$.

15. Sexa S a porción do plano $x+y+z=1$ limitada polo triángulo de vértices (1,0,0) , (0,1,0) e (0,0,1) e sexa F o campo $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Calcula $\int\int_S F\,dS$ supoñendo que S está orientada cunha normal que ten a terceira compoñente negativa.

1. $h(x,y)=\sqrt{y^2-x^2}=\sqrt{(y-x)(y+x)}$

$$(y-x)(y+x)\geq 0 \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} y+x\geq 0,\ y-x\geq 0 \\ \text{ó} \\ y+x\leq 0,\ y-x\leq 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} y\geq -x,\ y\geq x \\ \text{ó} \\ y\leq -x,\ y\leq x \end{cases}$$



$$D(h)=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / y\geq x,\ y\geq -x\}\cup\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / y\leq -x,\ y\leq x\}$$

2. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x>y\}$

$\mathring{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x>y\}=D$ por tanto, D é aberto.

$Fr(D)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=x\}\not\subset D$ por tanto, D non é pechado.

3. $f(x,y) = 2x^2 + y^4 + 4xy - 1$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x + 4y = 0 \rightarrow y = -x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y^3 + 4x = 0 \rightarrow y^3 = -x \end{aligned}\right\} \quad y^3 = y \rightarrow y^3 - y = 0 \rightarrow y(y^2 - 1) = 0 \;\begin{cases} y = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Por tanto, os puntos críticos de f son (0,0) , (1,-1) , (-1,1).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 \end{vmatrix}$$

$H(0,0) = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$ Por tanto, en (0,0) hai un punto de sela.

$H(1,-1) = \begin{vmatrix} \overset{>0}{4} & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 32 > 0$ Por tanto, en (1,-1) hai un mínimo relativo.

$H(-1,1) = \begin{vmatrix} \overset{>0}{4} & 4 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 32 > 0$ Por tanto, en (-1,1) hai un mínimo relativo.

4. $f(x,y)=x^2-y^2+1 \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$

$\nabla f(x,y)=(2x,-2y) \qquad \nabla g(x,y)=(2x,2y)$

$$\begin{cases} 2x=\lambda 2x \rightarrow 2x-\lambda 2x=0 \rightarrow 2x(1-\lambda)=0 & x=0 \;\text{ or }\; \lambda=1 \\ -2y=\lambda 2y \rightarrow -2y-\lambda 2y=0 \rightarrow -2y(1+\lambda)=0 & y=0 \;\text{ or }\; \lambda=-1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

- $x=0$

$y^2=1 \rightarrow y=\pm 1$

Obtemos os puntos (0,1) , (0,-1).

- $\lambda=1$

$-2y=2y\rightarrow -4y=0\rightarrow y=0$

$x^2+y^2=1\rightarrow x^2=1\rightarrow x=\pm 1$

Obtemos os puntos (1,0) , (-1,0).

- $\lambda=-1$

$2x=-2x\rightarrow 4x=0\rightarrow x=0\rightarrow y=\pm 1$ Obtemos as mesmas solucións.

- $y=0$

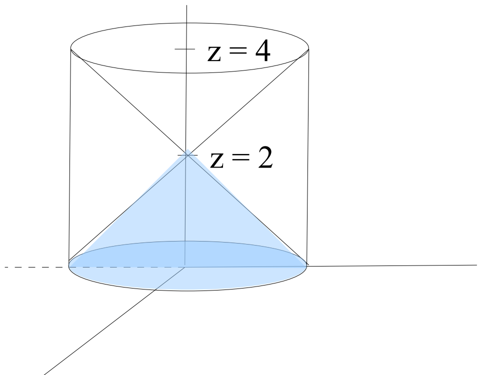
$x=\pm 1$ Por tanto, obtemos as mesmas solucións que para $\lambda=1$

$$\begin{array}{ll} (1,0) & f(1,0)=2 \\ (-1,0) & f(-1,0)=2 \\ (0,1) & f(0,1)=0 \\ (0,-1) & f(0,-1)=0 \end{array}$$

Por tanto, os puntos (1,0) e (-1,0) son puntos de máximo absoluto mentres que os puntos (0,-1) e (0,1) son puntos de mínimo absoluto.

6. $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2\leq 4, z\geq 0\}$ é un cilindro.

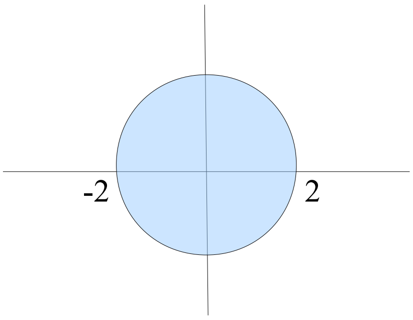
$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2=(z-2)^2, z\geq 0\}$ é un cono.



Hallamos donde se cortan o cono e o cilindro:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=4 \\ x^2+y^2=(z-2)^2 \end{array}\right\} \quad 4=(z-2)^2 \quad \rightarrow \quad z-2=\pm 2 \quad \begin{array}{l} z=0 \\ z=4 \end{array}$$

A proyección sobre o plano XY da rexión:



Tomamos coordenadas cilíndricas:

$$\left\{\begin{array}{ll} x=\rho\cos\theta & \rho\in[0,2] \\ y=\rho\, sen\,\theta & \\ z=z & \theta\in[0,2\pi] \end{array}\right.$$

Hallemos ahora o límite superior de z (a rexión está tapada por o cono) :

$(z-2)^2=x^2+y^2 \quad \rightarrow \quad z-2=\pm\sqrt{x^2+y^2} \quad \rightarrow \quad z=2\pm\sqrt{x^2+y^2}$ collemos a ecuación da parte inferior do cono xa que é a que está tapando a rexión $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$. En coordenadas cilíndricas $z=2-\rho$. Por tanto:

$$V=\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{2-\rho}\rho\, dz\, d\theta\, d\rho=\int_0^2\int_0^{2\pi}(2\rho-\rho^2)\,d\theta\, d\rho=2\pi\int_0^2(2\rho-\rho^2)\,d\rho=2\pi\left[\rho^2-\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2=\frac{8\pi}{3}$$

7. $\sigma(t)=(cost, sent, 4t)$

$F=ma \quad \vec{F}(t)=m\sigma''(t)$

$\sigma'(t)=(cost, -sent, 4)$

$\sigma''(t)=(-sent, -cost, 0)$

Por tanto:

$\vec{F}(\pi)=m(-sen\pi, -\cos\pi, 0)=(0, m, 0)$

$\|\vec{F}(\pi)\|=\sqrt{m^2}=m \quad N$

10. $\Phi(u,v)=(u\cos v,\, u\,\mathrm{sen}v+2,\, u+1)$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x=u\cos v \quad\to\quad x=u\cos v \\ y=u\,\mathrm{sen}v+2 \quad\to\quad y-2=u\,\mathrm{sen}v \end{array}\right\} \\ z=u+1 \end{array}\right. \begin{array}{l} x^2+(y-2)^2=u^2 \\ z-1=u \end{array}\Bigg\}\; x^2+(y-2)^2=(z-1)^2$$ é un cono.

11.

$z \in [0,1] \quad \rightarrow \quad u = z-1 \quad , \quad u \in [-1,0]$

$\Phi_u = (cosv \,, senv \,, 1)$
$\Phi_v = (-usenv \,, u\,cosv \,, 0)$

$$\Phi_u \, x \, \Phi_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ cosv & senv & 1 \\ -usenv & ucosv & 0 \end{vmatrix} = (-ucosv \,, -usenv \,, u)$$

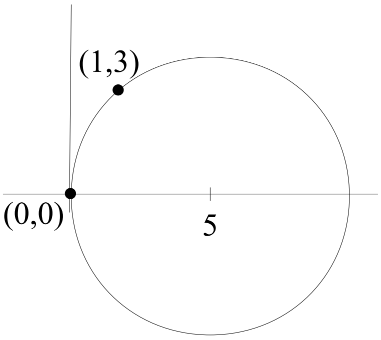
$$\|\Phi_u \, x \, \Phi_v\| = \sqrt{u^2+u^2} = \sqrt{2}|u| \underset{\substack{\uparrow \\ u<0}}{=} -\sqrt{2}\,u$$

$$Area = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{2\pi} \|\Phi_u \, x \, \Phi_v\| dv\,du = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{2\pi} -\sqrt{2}\,u\,dv\,du = \int_{-1}^{0} -2\pi\sqrt{2}\,u\,du = -\pi\sqrt{2}\,u^2\Big|_{-1}^{0} = \pi\sqrt{2}$$

12. (0,0) → (1,3)

$$y^2=10x-x^2 \quad \rightarrow \quad y^2+x^2-10x=0 \quad \rightarrow \quad y^2+(x-5)^2=25$$

$$\begin{matrix} x-5=5\cos\theta \\ y=5\,sen\,\theta \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=5+5\cos\theta \\ y=5\,sen\,\theta \end{cases}$$



$$\vec{r}(\theta)=(5+5\cos\theta\,,5\,sen\,\theta) \quad \theta\in[0,2\pi]$$

Si collemos este camiño estamos recorrendo a circunferencia indo desde o punto (1,3) ó (0,0), por tanto, collemos o camiño en sentido contrario:

Por tanto, tomamos:

$$\vec{s}(\theta)=\vec{r}(-\theta)=(5+5\cos\theta\,,-5\,sen\,\theta) \quad \theta\in[-2\pi\,,0]$$

- (0,0)

$$5+5\cos\theta=0 \quad \rightarrow \quad \cos\theta=-1 \quad \rightarrow \quad \theta=-\pi$$

$$-5\,sen\,\theta=0 \quad \rightarrow \quad \theta=-\pi$$

- (1,3)

$$5+5\cos\theta=1 \quad \rightarrow \quad 5\cos\theta=-4 \quad \cos\theta=\frac{-4}{5}$$

$$-5\,sen\,\theta=3 \quad \rightarrow \quad sen\,\theta=\frac{-3}{5}$$

$$\theta\approx-143{,}13^{o} \quad \rightarrow \quad \theta\approx-0{,}795\pi$$

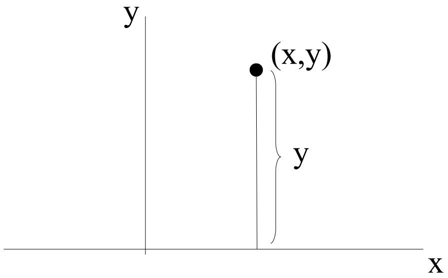
$$\vec{s}\,'(\theta)=(-5\,sen\,\theta\,,-5\cos\theta)$$

$$\|\vec{s}\,'(\theta)\|=\sqrt{25}=5$$

Por tanto:

$$l=\int_{-\pi}^{-0{,}795\pi} 5\,d\theta=5\theta\Big|_{-\pi}^{-0{,}795\pi}=-3{,}975\pi+5\pi=1{,}025\pi$$

13. $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=4, y\geq 0\}$

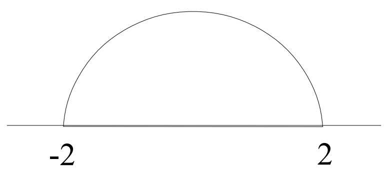


$y \geq 0$

$\mu(x,y)=2|y|=2y$

Parametrizamos a curva C:

$x=2\cos\theta$
$y=2\,sen\,\theta$ $\quad \theta\in[0,\pi]$



$r(\theta)=(2\cos\theta, 2\,sen\,\theta) \quad \theta\in[0,\pi]$

$\mu(r(\theta))=2(2\,sen\,\theta)=4\,sen\,\theta$

$r'(\theta)=(-2\,sen\,\theta, 2\cos\theta)$

$\|r'(\theta)\|=\sqrt{4}=2$

$$m(C)=\int_0^\pi \mu(r(\theta))\|r'(\theta)\|\,d\theta=\int_0^\pi 4\,sen\,\theta\,2\,d\theta=8\int_0^\pi sen\,\theta\,d\theta=8[-\cos\theta]_0^\pi=8(1-(-1))=16$$

14. $F(x,y,z)=(y,x,2y)$

C curva de intersección de:

$$x^2+y^2=4$$
$$x+z=1 \quad \rightarrow \quad z=1-x$$

Parametrizo a curva:

$$\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\,sen\,\theta \\ z=1-2\cos\theta \end{cases} \qquad \theta\in[0,2\pi]$$

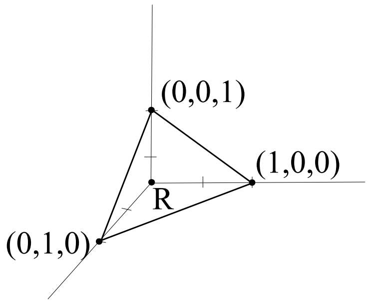
$$\vec{F}(r(\theta))=(2\,sen\,\theta\,,2\cos\theta\,,4\,sen\,\theta)$$

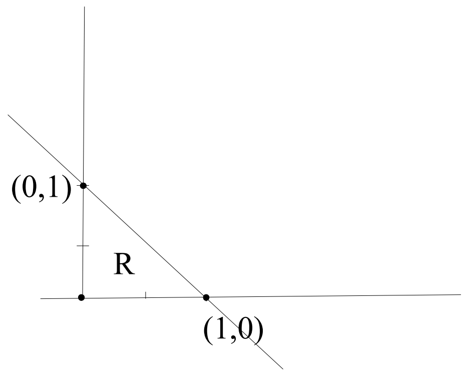
$$r'(\theta)=(-2\,sen\,\theta,2\cos\theta\,,2\,sen\,\theta)$$

$$F(r(\theta)).r'(\theta)=-4\,sen^2\theta+4\cos^2\theta+8\,sen^2\theta=4$$

$$T=\int_r \vec{F}\,d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\vec{F}(r(\theta)).r'(\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}4\,d\theta=4\theta\Big|_0^{2\pi}=8\pi$$

15.





R:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \end{cases}$$

Q:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le z \le 1-x-y \end{cases}$$

Por tanto, unha parametrización da superficie é:

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= 1-x-y \quad \rightarrow \quad z = 1-u-v \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u &\in [0,1] \\ v &\in [0, 1-u] \end{aligned}$$

$$r(u,v) = (u, v, 1-u-v)$$

$$r_u = (1,0,-1)$$
$$r_v = (0,1,-1)$$

$$r_u x\, r_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1,1,1)$$

$$\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\vec{F}(r(u,v)) = (u, v, 1-u-v)$$

$$\vec{F}(r(u,v))\, r_u x\, r_v = 1$$

$$\int\int_S \vec{F}\, dS = \int\int_R \vec{F}(r(u,v))\, r_u x\, r_v\, dA = \int_0^1 \int_0^{1-u} 1\, dv\, du = \int_0^1 (1-u)\, du = u - \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$