1. Dominio de $h(x,y)=\log(x^2-y^2)$

2. Conxunto $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\geq x\}$ é un conxunto:

   ☐ Pechado ☐ Aberto ☐ N.A.N.P. ☐ A. e P.

3. Puntos críticos da función $f(x,y)=4xy-2x^2-y^4+1$ (Utiliza $\nexists$ no caso de que non exista algún deles).

4. Dados $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=x^2+y^2+1$ e $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$, calcula os extremos de f en D e o valor da función neles.

5. Calcula o valor da seguinte integral

$$\int_0^1\int_x^1 e^{y^2}\,dy\,dx$$

6. Escribe unha integral cuxo resultado sexa o volume do poliedro con vértices nos puntos (0,0,0) , (3,2,0) , (0,3,0) e (0,0,3) . Escribe tamén o resultado da integral (volume indicado)

7. Escribe unha integral cuxo resultado sexa o volume da parte da rexión V que está embaixo da superficie S, onde $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2\leq 9, z\geq 0\}$ e $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2=(z-3)^2, z\geq 0\}$ con R > 0. Escribe tamén o resultado da integral (volume indicado).

8. Unha partícula de masa m móvese seguindo a traxectoria $\sigma:[0,3\pi]\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^3$ definida por $\sigma(t)=(sent, cost, 4t)$. Calcula a forza F que actúa sobre a partícula no intre $t=2\pi$

9. Sexa $f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}$ un campo escalar e $F:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$ un campo vectorial. Utiliza CE, CV, EN.

   a) div f b) ∇ f c) rot F

   d) ∇ .∇ f e) ∇ x ∇f f) div F

10. ¿ Qué cuádrica é o soporte da superficie paramétrica $\Phi : [-1,1] x [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\Phi(u, v) = (ucosv - 1, u\, senv + 2, u)$? Escribe a súa ecuación en coordenadas cartesianas.

11. Escribe unha integral que mida a área da cuádrica anterior con $-1 \leq z \leq 0$

12. Calcula a lonxitude l do camiño máis curto para ir do punto (0,0) ao (1,3) ao longo da curva de ecuación $y^2 = 10\mathrm{x} - x^2$

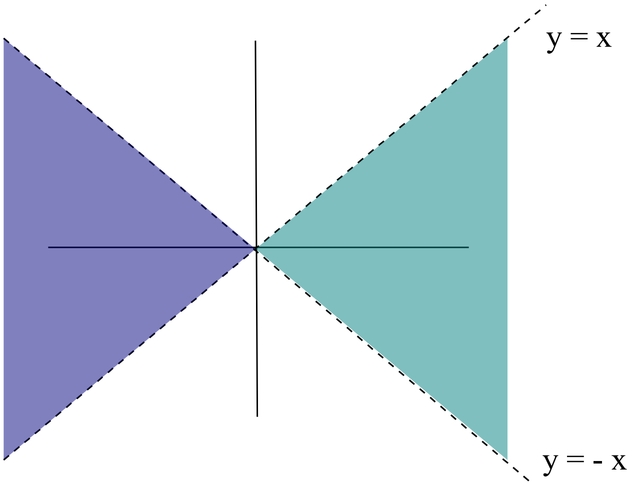
13. Un arame ten a forma da curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 4, y \geq 0\}$. Calcula a masa m do arame se a densidade linear en cada punto (x,y) do arame é o triple da distancia do punto ao eixo de abcisas.

14. Calcula o traballo T realizado polo campo de forzas $F(x, y, z) = (y, x, 2\mathrm{y})$ sobre unha partícula que percorre a curva intersección das superficies $x^2 + y^2 = 4$ e $x + z = 2$.

15. Sexa S a porción do plano $x + y + z = 2$ limitada polo triángulo de vértices (2,0,0) , (0,2,0) e (0,0,2) e sexa F o campo $\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Calcula $\int\int_S F\, dS$ supoñendo que S está orientada cunha normal que ten a terceira compoñente positiva.

1. $h(x,y)=\log(x^2-y^2)=\log((x-y)(x+y))$

$$(x-y)(x+y)>0 \quad \leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} x-y>0,\, x+y>0 \\ \text{ó} \\ x-y<0,\, x+y<0 \end{array}\right. \quad \leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} y<x,\, y>-x \\ \text{ó} \\ y>x,\, y<-x \end{array}\right.$$



$$D(h)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y<x,\, y>-x\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y>x,\, y<-x\}$$

2. $D=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / y\geq x\}$

$\mathring{D}=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / y>x\}\neq D$ por tanto, non é aberto.

$Fr(D)=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / y=x\}\subset D$ por tanto, D é pechado.

3. $f(x,y)=4\text{xy}-2x^2-y^4+1$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=4\text{y}-4\text{x}=0 \;\rightarrow\; y=x\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=4\text{x}-4y^3=0 \;\rightarrow\; y^3=x\end{aligned}\right\}\quad y^3=y \;\rightarrow\; y^3-y=0 \;\rightarrow\; y(y^2-1)=0 \;\begin{cases} y=0\\ y=\pm 1\end{cases}$$

Por tanto, os puntos críticos de f son (0,0) , (1,1) , (-1,-1).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-12\text{y}^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=4$$

$$H(x,y)=\begin{vmatrix}-4 & 4\\ 4 & -12\text{y}^2\end{vmatrix}$$

$H(0,0)=\begin{vmatrix}-4 & 4\\ 4 & 0\end{vmatrix}=-16<0$ Por tanto, en (0,0) hai un punto de sela.

$H(1,1)=\begin{vmatrix}\overset{<0}{-4} & 4\\ 4 & -12\end{vmatrix}=32>0$ Por tanto, en (1,1) hai un máximo relativo.

$H(-1,-1)=\begin{vmatrix}\overset{<0}{-4} & 4\\ 4 & -12\end{vmatrix}=32>0$ Por tanto, en (-1,-1) hai un máximo relativo.

4. $f(x,y)=x^2+y^2+1 \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$

$\nabla f(x,y)=(2x,2y) \qquad \nabla g(x,y)=(2x,2y)$

$$\begin{cases} 2x=\lambda 2x \rightarrow 2x-\lambda 2x=0 \rightarrow 2x(1-\lambda)=0 \begin{cases} x=0 \\ \lambda=1 \end{cases} \\ 2y=\lambda 2y \rightarrow 2y-\lambda 2y=0 \rightarrow 2y(1-\lambda)=0 \begin{cases} y=0 \\ \lambda=1 \end{cases} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

- $x=0$

$y^2=1 \rightarrow y=\pm 1$

Obtemos os puntos (0,1) , (0,-1).

- $y=0$

$x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$

Obtemos os puntos (1,0) , (-1,0).

- $\lambda=1$

$\begin{cases} 2x=2x \\ 2y=2y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ Todos os puntos da circunferencia verifican as tres ecuacións, por tanto, tódolos puntos de D son puntos críticos.

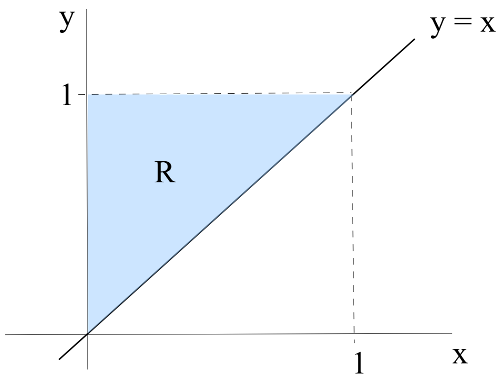
O valor da función nos puntos da circunferencia é:

$f(x,y)=\underbrace{x^2+y^2}_{=1}+1 = 2$ Tódolos puntos son puntos de máximo e mínimo absoluto.

5. $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} \, dy \, dx$

Para hallar esa integral debemos cambiar a orde de integración. Temos a seguinte rexión R:

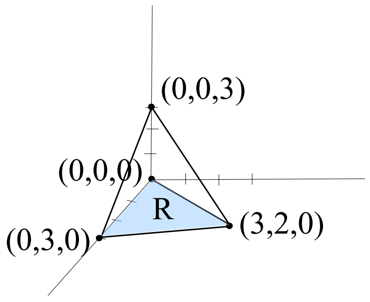
$$\begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq y \end{matrix}$$

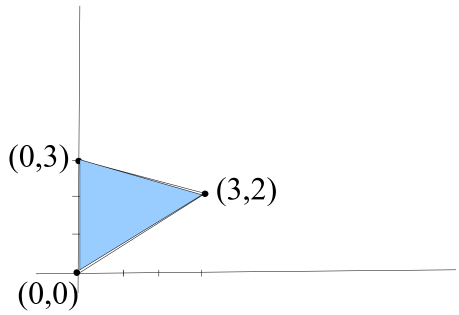


Por tanto:

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy\, dx = \int_0^1 \int_0^y e^{y^2} dx\, dy = \int_0^1 y\, e^{y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 2y\, e^{y^2} dy = \frac{1}{2} [e^{y^2}]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)$$

6.





- Recta que pasa por (3,2) e (0,0)

$\vec{v}=(3,2)-(0,0)=(3,2) \qquad P=(0,0)$

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{2} \quad \rightarrow \quad y=\frac{2}{3}x$$

- Recta que pasa por (0,3) e (3,2)

$\vec{v}=(3,2)-(0,3)=(3,-1) \qquad Q=(0,3)$

$$\frac{x}{3}=\frac{y-3}{-1} \quad \rightarrow \quad y=3-\frac{x}{3}$$

Entonces, a región R ven dada por:

$$0 \le x \le 3$$

$$\frac{2x}{3} \le y \le 3-\frac{x}{3}$$

Hallemos ahora a ecuación do plano que pasa polos puntos (0,0,3) , (3,2,0) e (0,3,0).

$\vec{v}_1=(3,2,0)-(0,0,3)=(3,2,-3)$
$\vec{v}_2=(0,3,0)-(0,0,3)=(0,3,-3) \qquad P=(0,0,3)$

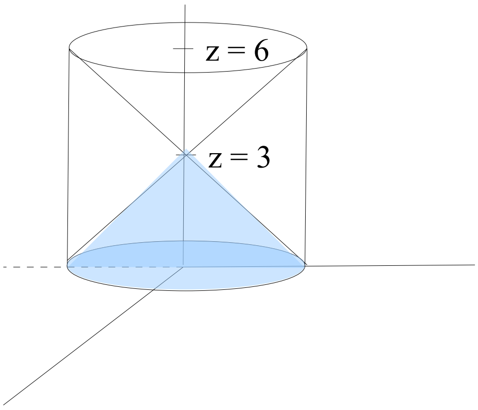
$$\pi=\begin{vmatrix} x & 3 & 0 \\ y & 2 & 3 \\ z-3 & -3 & -3 \end{vmatrix}=3x+9y+9z-27=0 \quad \rightarrow \quad \pi: x+3y+3z-9=0 \quad \rightarrow \quad z=3-\frac{x}{3}-y$$

Por tanto:

$$V = \int_{0}^{3} \int_{\frac{2x}{3}}^{3-\frac{x}{3}} \int_{0}^{3-\frac{x}{3}-y} 1\, dzdydx$$

7. $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2\leq 9, z\geq 0\}$ é un cilindro.

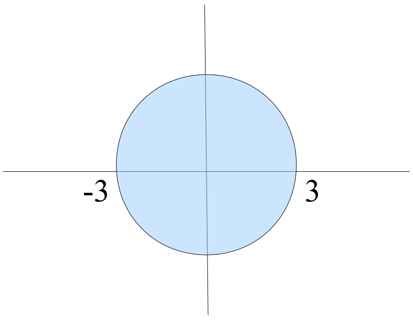
$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2=(z-3)^2, z\geq 0\}$ é un cono.



Hallamos donde se cortan o cono e o cilindro:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=9 \\ x^2+y^2=(z-3)^2 \end{array}\right\} \; 9=(z-3)^2 \;\rightarrow\; z-3=\pm 3 \; \begin{cases} z=0 \\ z=6 \end{cases}$$

A proyección sobre o plano XY da rexión:



Tomamos coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta & \rho\in[0,3] \\ y=\rho\, sen\theta & \\ z=z & \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$$

Hallemos ahora o límite superior de z (a rexión está tapada por o cono) :

$(z-3)^2=x^2+y^2 \;\rightarrow\; z-3=\pm\sqrt{x^2+y^2} \;\rightarrow\; z=3\pm\sqrt{x^2+y^2}$ collemos a ecuación da parte inferior do cono xa que é a que está tapando a rexión $z=3-\sqrt{x^2+y^2}$. En coordenadas cilíndricas $z=3-\rho$. Por tanto:

$$V=\int_0^3\int_0^{2\pi}\int_0^{3-\rho}\rho\, dz d\theta d\rho=\int_0^3\int_0^{2\pi}(3\rho-\rho^2)d\theta d\rho=2\pi\int_0^3(3\rho-\rho^2)d\rho=2\pi\left[\frac{3\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}\right]_0^3=9\pi$$

8. $\sigma(t)=(sent, cost, 4\text{t})$

$F=ma \quad \vec{F}(t)=m\sigma''(t)$

$\sigma''(t)=(-sent, -cost, 0) \quad \sigma''(2\pi)=(0, -1, 0)$

$\vec{F}(2\pi)=m(0,-1,0)=(0,-m,0)$

$\|\vec{F}(2\pi)\|=\sqrt{(-m)^2}=m \quad N$

10. $\Phi(u,v)=(ucosv-1,\, u\,senv+2,\, u)$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{lll} x=u\cos v-1 & \rightarrow & x+1=u\,cosv \\ y=u\,senv+2 & \rightarrow & y-2=u\,senv \end{array}\right\} (x+1)^2+(y-2)^2=u^2 \\ z=u \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z=u \end{array}\right\} (x+1)^2+(y-2)^2=z^2$$ é un cono.

11.

$$z\in[-1,0] \xrightarrow{\underset{\downarrow}{z=u}} u\in[-1,0]$$

$$\Phi(u,v)=(u\cos v-1,\ u\,\mathrm{sen}v+2,\ u)\quad \begin{matrix} u\in[-1,0] \\ v\in[0,2\pi] \end{matrix}$$

$$\Phi_u=(\cos v,\ \mathrm{sen}v,\ 1)$$
$$\Phi_v=(-u\,\mathrm{sen}v,\ u\cos v,\ 0)$$

$$\Phi_u\, x\, \Phi_v=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \mathrm{sen}v & 1 \\ -u\,\mathrm{sen}v & u\cos v & 0 \end{vmatrix}=(-u\cos v,-u\,\mathrm{sen}v,\ u)$$

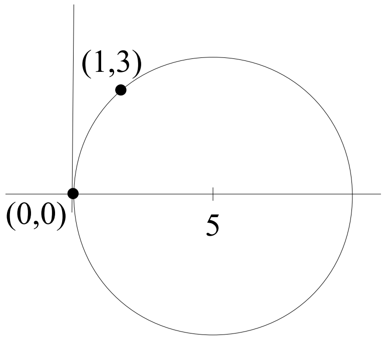
$$\|\Phi_u\, x\,\Phi_v\|=\sqrt{u^2+u^2}=\sqrt{2}|u| \underset{\substack{\uparrow \\ u<0}}{=} -\sqrt{2}\,u$$

$$Area=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2\pi}\|\Phi_u\, x\,\Phi_v\|\,dv\,du=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2\pi}-\sqrt{2}\,u\,dv\,du=\int_{-1}^{0}-2\pi\sqrt{2}\,u\,du=-\pi\sqrt{2}\,u^2\Big|_{-1}^{0}=\pi\sqrt{2}$$

12. $(0,0) \rightarrow (1,3)$

$$y^2 = 10x - x^2 \quad \rightarrow \quad y^2 + x^2 - 10x = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 + (x-5)^2 = 25$$

$$\begin{array}{l} x-5=5\cos\theta \\ y=5\,sen\,\theta \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=5+5\cos\theta \\ y=5\,sen\,\theta \end{array} \right.$$



$$\vec{r}(\theta) = (5+5\cos\theta\,,\,5\,sen\,\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Si collemos este camiño estamos recorrendo a circunferencia indo desde o punto (1,3) ó (0,0), por tanto, collemos o camiño en sentido contrario:

Por tanto, tomamos:

$$\vec{s}(\theta) = \vec{r}(-\theta) = (5+5\cos\theta\,,-5\,sen\,\theta) \quad \theta \in [-2\pi\,,0]$$

- (0,0)

$$5+5\cos\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \cos\theta = -1 \quad \rightarrow \quad \theta = -\pi$$

$$-5\,sen\,\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = -\pi$$

- (1,3)

$$\left. \begin{array}{l} 5+5\cos\theta = 1 \quad \rightarrow \quad 5\cos\theta = -4 \quad \cos\theta = \dfrac{-4}{5} \\ -5\,sen\,\theta = 3 \quad \rightarrow \quad sen\,\theta = \dfrac{-3}{5} \end{array} \right\} \quad \theta \approx -143{,}13^{o} \quad \rightarrow \quad \theta \approx -0{,}795\pi$$

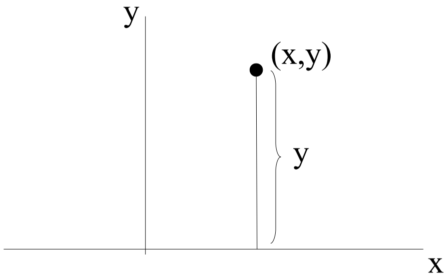
$$\vec{s}\,'(\theta) = (-5\,sen\,\theta\,,-5\cos\theta)$$

$$\|\vec{s}\,'(\theta)\| = \sqrt{25} = 5$$

Por tanto:

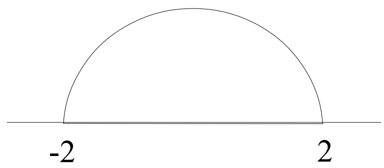
$$l = \int_{-\pi}^{-0{,}795\pi} 5\,d\theta = 5\theta \Big|_{-\pi}^{-0{,}795\pi} = -3{,}975\pi + 5\pi = 1{,}025\pi$$

13. $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=4, y\geq 0\}$



$$\mu(x,y)=3|y|\overset{y\geq 0}{=}3y$$

Parametrizamos a curva C:



$$x=2\cos\theta \qquad \theta\in[0,\pi]$$
$$y=2\,sen\,\theta$$

$$r(\theta)=(2\cos\theta, 2\,sen\,\theta) \quad \theta\in[0,\pi]$$

$$\mu(r(\theta))=3(2\,sen\,\theta)=6\,sen\,\theta$$

$$r'(\theta)=(-2\,sen\,\theta, 2\cos\theta)$$

$$\|r'(\theta)\|=\sqrt{4}=2$$

$$m(C)=\int_0^\pi \mu(r(\theta))\|r'(\theta)\|\,d\theta=\int_0^\pi 6\,sen\,\theta\,2\,d\theta=12\int_0^\pi sen\,\theta\,d\theta=12[-\cos\theta]_0^\pi=12(1-(-1))=24$$

14. $F(x, y, z) = (y, x, 2y)$

C curva de intersección de:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x + z = 2 \quad \rightarrow \quad z = 2 - x$$

Parametrizo a curva:

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\,sen\,\theta \\ z = 2 - 2\cos\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

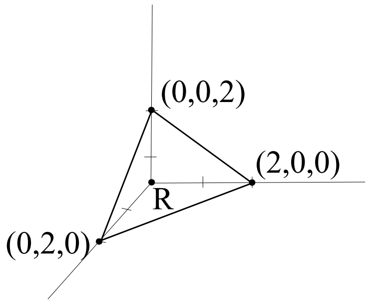
$$F(r(\theta)) = (2\,sen\,\theta, 2\cos\theta, 4\,sen\,\theta)$$

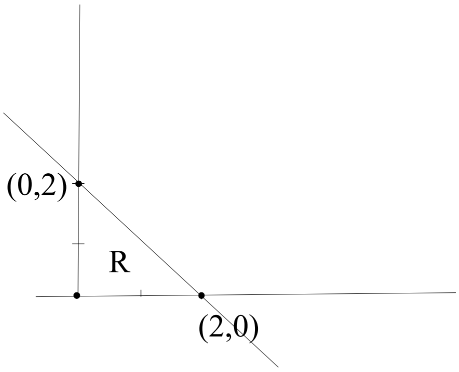
$$r'(\theta) = (-2\,sen\,\theta, 2\cos\theta, 2\,sen\,\theta)$$

$$F(r(\theta)).r'(\theta) = (2\,sen\,\theta, 2\cos\theta, 4\,sen\,\theta).(-2\,sen\,\theta, 2\cos\theta, 2\,sen\,\theta) = -4\,sen^2\theta + 4\cos^2\theta + 8\,sen^2\theta = 4\,sen^2\theta + 4\cos^2\theta = 4$$

$$T = \int_r \vec{F}\,d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(r(\theta)).r'(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} 4\,d\theta = 4\theta\Big|_0^{2\pi} = 8\pi$$

15.





R:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2-x \end{cases}$$

Q:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2-x \\ 0 \le z \le 2-x-y \end{cases}$$

$$\vec{F} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\text{div}\,F = 1+1+1 = 3$$

$$\int\int_S \vec{F}\,d\,S = \int\int\int_Q \text{div}\,\vec{F}\,dV = \int_0^2\int_0^{2-x}\int_0^{2-x-y} 3\,dV = \int_0^2\int_0^{2-x} 3(2-x-y)\,dy\,dx = 3\int_0^2\int_0^{2-x}\left[2\text{y} - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{2-x} =$$

$$= 3\int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - 2\text{x} + 2\right)dx = 3\left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2\text{x}\right]_0^2 = 3\left(\frac{4}{3} - 4 + 4\right) = 4$$