TIPO D

1. $\ln\left|\sqrt{y^2 - x^2}\right|$

$$\left|\sqrt{y^2 - x^2}\right| > 0 \Rightarrow y^2 - x^2 \neq 0$$

Ademáis:

$$y^2 - x^2 \geq 0$$

Entonces, xuntando as duas condicións:

$$y^2 - x^2 > 0 \Rightarrow (y-x)(y+x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} (y-x) > 0, (y+x) > 0 \\ (y-x) < 0, (y+x) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > x, y > -x \\ y < x, y < -x \end{cases}$$

Dom (h) = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > x, y > -x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y < x, y < -x\}$

2. *C =* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 - y^2 > 1\}$

Por tanto:

$$Int(C) = C \quad (C \text{ é aberto})$$

$$Fr(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 - y^2 = 1\}$$

3. $f(x,y) = -xe^{\frac{-x^2-y^2}{2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{\frac{-x^2-y^2}{2}} + x^2 e^{\frac{-x^2-y^2}{2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -xe^{\frac{-x^2-y^2}{2}}(-y) = xye^{\frac{-x^2-y^2}{2}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Por tanto, os puntos críticos son:

(1,0) , (-1, 0)

jmrivas Academia
Esta obra está sujeta a la licencia Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

4. $f(x,y)=-xy^2 \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 2x^2+y^2=6\}$

$$\nabla f(x,y)=(-y^2,-2xy)$$
$$\nabla g(x,y)=(4x,2y)$$

$$\begin{cases} -y^2=4\lambda x \\ -2xy=2y\lambda \Leftrightarrow -2xy-2y\lambda=0 \Leftrightarrow -2y(x+\lambda)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-\lambda \end{cases} \\ 2x^2+y^2=6 \end{cases}$$

- **y=0**

$$2x^2+y^2=6 \Rightarrow 2x^2=6 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3} \quad (\sqrt{3},0)\ ,\ (-\sqrt{3},0)$$

- **x =-**λ

$$-y^2=-4\lambda^2 \Rightarrow y^2=4\lambda^2$$

$$2\lambda^2+4\lambda^2=6 \Rightarrow \lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm1$$

$$\lambda=1 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=-2 \end{cases} \qquad (-1,2)\ ,\ (-1,-2)$$

$$\lambda=-1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=-2 \end{cases} \qquad (1,2)\ ,\ (1,-2)$$

$$f(\sqrt{3},0)=0$$

$$f(-\sqrt{3},0)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1,2)=4 \\ f(-1,-2)=4 \end{array}\right\} \textit{Máximo absoluto}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,2)=-4 \\ f(1,-2)=-4 \end{array}\right\} \textit{Mínimo absoluto}$$

jmrivas Academia
Esta obra está sujeta a la licencia Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

5. $x^2-2x+y^2-z^2-4z-3=0$

$$(x-1)^2+y^2-\left(z+2\right)^2=x^2-2x+1+y^2-(z^2+4+4z)=x^2-2x+y^2-z^2-4z-3=0$$

Por tanto:

$$(x-1)^2+y^2-(z+2)^2=0\Rightarrow(z+2)^2=(x-1)^2+y^2$$

Cono de vértice no (1 , 0 , -2)

$$x^2-2x+y^2+z^2+4z+5=0$$

$$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=x^2-2x+1+y^2+z^2+4z+4=x^2-2x+y^2+z^2+4z+5=0$$

$$(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=0\Rightarrow\begin{cases}x-1=0\Rightarrow x=1\\ y=0\\ z+2=0\Rightarrow z=-2\end{cases}$$

É un punto: (1 , 0 , -2)

jmrivas Academia
Esta obra está sujeta a la licencia Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

6. $A=\int_{-2}^{0}(x+1-(x))dx=\int_{-2}^{0}dx=x]_{-2}^{0}=2u^2$

7.

$$\int_{-4}^{0}\int_{-\frac{x}{2}}^{2} f(x,y)dydx$$

$$\begin{cases}-4<x<0\\ -\dfrac{x}{2}<y<2\end{cases}$$

$$\begin{cases}0<y<2\\ -2y<x<0\end{cases}$$

$$\int_{0}^{2}\int_{-2y}^{0} f(x,y)dxdy$$

8. Escribir en coordenadas polares e resolve a seguinte integral onde a é un número real estrictamente positivo.

$$\int_0^a\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=\int_0^a\int_0^{\pi}\rho\sqrt{a^2-\rho^2}\,d\theta d\rho$$

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho sen\theta\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}x=\pm\sqrt{a^2-y^2}\Rightarrow x^2+y^2=a^2\\ 0\le y\le a\end{matrix}\right\}\Rightarrow\rho\in[0,a],\theta\in[0,\pi]$$

9. $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2/(x-1)^2+y^2\le(z+2)^2,\ (x-1)^2+y^2+(z+2)^2\le 8,\ z\ge -2\right\}$

$$(z+2)^2\ge(x-1)^2+y^2\Rightarrow(z+2)\ge\pm\sqrt{(x-1)^2+y^2}\Rightarrow z\ge -2\pm\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$(z+2)^2\le 8-(x-1)^2-y^2\Rightarrow(z+2)\le\pm\sqrt{8-(x-1)^2-y^2}\Rightarrow z\le -2\pm\sqrt{8-(x-1)^2-y^2}$$

jmrivas Academia
Esta obra está sujeta a la licencia Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

Como $z \geq -2$, quedámonos coas partes superiores.

Esfera centrada en (1 , 0 , -2), cono con vértice en (1 , 0 , -2). Hallamos a intersección de esfera e como:

$$\left.\begin{array}{l}(z+2)^2 = (x-1)^2 + y^2 \\ \\ (z+2)^2 = 8-(x-1)^2 - y^2\end{array}\right\} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 8-(x-1)^2 - y^2$$

$$2(x-1)^2 + 2y^2 = 8 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4$$

Por tanto:

$$-1 \leq x \leq 3$$
$$-\sqrt{4-(x-1)^2} \leq y \leq \sqrt{4-(x-1)^2}$$

$$x \in [-1,3]$$
$$y^2 = 4-(x-1)^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4-(x-1)^2}$$

$E\ z,$

$$z \geq -2 + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$z \leq -2 + \sqrt{8-(x-1)^2 - y^2}$$

Por tanto:

$$V = \int_1^3 \int_{-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-(x-1)^2}} \int_{-2+\sqrt{(x-1)^2+y^2}}^{-2+\sqrt{8-(x-1)^2-y^2}} dzdydx$$

10. Hallamos o plano que pasa por os puntos (0 , 0, 3) , (3 , 2 , 0) e (9 , 0 , 0).

(3 , 2 , 0) – (0 , 0 , 3) = (3 , 2 , -3)

(9, 0 , 0) – (0 , 0 , 3) = (9 , 0 , -3)

jmrivas Academia
Esta obra está sujeta a la licencia Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

$$\pi:\begin{vmatrix} x & y & z-3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 9 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6x-18y-18z+54=0 \Rightarrow \pi: x+3y+3z-9=0$$

Calculamos a proyección sobre XY:

$$\boldsymbol{z=0 \Rightarrow x+3y-9=0}$$

Calculamos a recta que pasa por os puntos (0,0) e (3,2):

Un vector de esta recta será (3,2) e un punto o (0,0):

$$\boldsymbol{\frac{x}{3}=\frac{y}{2} \Rightarrow y=\frac{2x}{3}}$$

Polo tanto, a rexión: $0 \le y \le 2, \frac{3y}{2} < x < 9-3y$

Entón:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ \frac{3}{2}y < x < 9-3y \\ 0 < z < \frac{9-x-3y}{3} \end{cases}$$

$$x+3y+3z-9=0 \Rightarrow z=\frac{9-x-3y}{3}$$

Polo tanto o volumen:

$$\int_0^2 \int_{\frac{3}{2}y}^{9-3y} \int_0^{\frac{9-x-3y}{3}} dzdxdy$$

jmrivas Academia
Esta obra está sujeta a la licencia Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

j.m.rivas ACADEMIA

11.

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2\le z^2, x^2+y^2+z^2\le 8, z\ge 0\right\}$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho sen\theta \\ z=z \end{cases}$$

Hallamos a intersección e temos que:

$$x^2+y^2\le 4 \Rightarrow \rho\in[0,2], \theta\in[0,2\pi]$$

$$z^2=8-x^2-y^2 \Rightarrow z=\pm\sqrt{8-\rho^2} \Rightarrow z=\sqrt{8-\rho^2} \text{ (parte superior esfera)}$$

$$x^2+y^2=z^2 \Rightarrow z^2=x^2+y^2 \Rightarrow z=\pm\sqrt{\rho^2} \Rightarrow z=\rho \text{ (parte superior cono)}$$

Polo tanto:

$$V=\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_\rho^{\sqrt{8-\rho^2}} \rho dz d\theta d\rho$$

12.

$x=\rho sen\varphi\cos\theta$ jacobiano $\rho^2 sen\varphi$ $\theta\in[0,2\pi]$

$y=\rho sen\varphi sen\theta$ $\varphi\in[0,\pi]$

$z=\rho cos\varphi$

A esfera ven dada por $\rho=\sqrt{8}$

O cono, en coordenadas esféricas ven dado por $x^2+y^2=z^2$

$\cancel{\rho^2} sen^2\varphi=\cancel{\rho^2} cos^2\varphi \Rightarrow tg^2\varphi=1 \Rightarrow tg\varphi=\pm 1$, o considerar a parte superior;

$$\Rightarrow tg\varphi=+1 \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$$

Polo tanto:

jmrivas Academia
Esta obra está sujeta a la licencia Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

$$0 \le \rho \le \sqrt{8}$$
$$0 < \theta < 2\pi$$
$$0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$$

$$V = \int_0^{\sqrt{8}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 sen\varphi d\varphi d\theta d\rho$$

13.

$divF \quad C.E.$	$\nabla f \quad C.V.$	$rotF \quad C.V.$
$\nabla\nabla f \quad C.E.$	$\nabla x \nabla f \quad C.V.$	$divF \quad C.E.$

14.

$$\sigma(t) = (sent, \cos t, 4t)$$
$$\sigma'(t) = (\cos t, -sent, 4)$$
$$\sigma'(\frac{3\pi}{2}) = (0,1,4) \leftarrow velocidad$$
$$rapidez = \|velocidad\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

15.

Parametrizamos a superficie:

$$x - 1 = \rho\cos\theta \qquad (x-1)^2 + y^2 = (z+2)^2$$

$$y = \rho sen\theta \qquad (z+2)^2 = \rho^2 \Rightarrow (z+2) = \pm\rho \Rightarrow z = -2 \pm \rho$$

jmrivas Academia
Esta obra está sujeta a la licencia Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

Como solo me interesa a parte de arriba de arriba de cómo z=-2 + ρ .

Por tanto:

$$S(\rho,\theta)=(1+\rho\cos\theta,\rho sen\theta,-2+\rho) \qquad z\in[3,4]\Rightarrow z+2\in[5,6]\Rightarrow \rho\in[5,6]$$

$$S\rho=(\cos\theta, sen\theta,1)$$
$$S\theta=(-\rho sen\theta,\rho\cos\theta,0)$$

$$S\rho\;x\;S\theta=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & sen\theta & 1 \\ -\rho sen\theta & \rho\cos\theta & 0\end{vmatrix}=\rho\cos^2\theta\vec{k}-\rho sen\theta\vec{j}-(-\rho sen^2\theta\vec{k}+\rho\cos\theta\vec{i})=(-\rho\cos\theta,-\rho sen\theta,\rho)$$

$$\|S\theta\;x\;S\rho\|=\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2 sen^2\theta+\rho^2}=\sqrt{-2\rho^2}=\sqrt{2}\rho$$

$$A=\int_5^6\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\rho.\rho\;d\theta d\rho$$

16.

$$\begin{aligned} x-1&=2\cos t \\ y-2&=2sent\end{aligned} \qquad t\in[-2\pi,0]$$ Para recorrela o revés

$$\sigma(t)=(1+2\cos t,2+2sent)$$

- $(1+\sqrt{3},3)$

$$\left.\begin{aligned} 1+\sqrt{3}=1+2\cos t\Rightarrow\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 3=2+2sent\Rightarrow 2sent=1\Rightarrow sent=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow t=-2\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{13\pi}{6}$$

- $(2,\sqrt{3}+2)$

$$\left.\begin{aligned} 2=1+2\cos t\Rightarrow 2\cos t=1\Rightarrow\cos t=\frac{1}{2} \\ \sqrt{3+2}=2+2sent\Rightarrow 2sent=\sqrt{3}\Rightarrow sent=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{3}$$

jmrivas Academia
Esta obra está sujeta a la licencia Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

Polo tanto,

$$L=\int_{-\frac{13\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{3}}2dt=2t\Big|_{-\frac{13\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{3}}=-\frac{2\pi}{3}-\left(-\frac{26\pi}{6}\right)=\frac{22\pi}{6}=\frac{11\pi}{3}$$

17.

r(t) = (2cost, 2sent) $\quad$ ***t ∈ [0, π]***

ρ(x, y) = 4y

$$m=\int_0^{\pi}\ \rho(r(t))\cdot\|r'(t)\|dt=\int_0^{\pi}16sentdt=16(-\cos t)_0^{\pi}=16-(-16)=32$$

$$\rho(r(t))=8sent$$

$$r'(t)=(-2sent,2\cos t)$$

$$\|r'(t)\|=\sqrt{4sen^2t+4cos^2t}=\sqrt{4}=2$$

18.

$$F(x,y,z)=(-x,y,0)\qquad x^2+y^2=1\quad x+y+z=1$$

A intersección ven dada por:

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=1-x-y\end{cases}$$

Polo tanto:

$$r(\theta)=(\cos\theta,\mathrm{s}en\theta,1-\cos\theta-\mathrm{s}en\theta)\ \ \theta\in[0,2\pi]$$

$$r(\theta)=(1,0,0)$$

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right)=(0,1,0)$$

jmrivas Academia
Esta obra está sujeta a la licencia Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.

$$r'(\theta)=(-\mathrm{s}en\theta,\cos\theta,\mathrm{s}en\theta-\cos\theta)\quad \theta\in[0,2\pi]$$

Entón:

$$\int_0^{2\pi}(-\cos\theta,sen\theta,0)\cdot(-\mathrm{s}en\theta,\cos\theta,\mathrm{s}en\theta-\cos\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}(2\cos\theta sen\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}sen(2\theta)d\theta=$$
$$=-\frac{1}{2}\cos(2\theta)\ \Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$F(r(\theta))=(-\cos\theta,sen\theta,0)$$

19.

$$S(x,y)=(x,y,3-x-y)$$

$$S_x\times S_y=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=\vec{k}-(-\vec{i}-\vec{j})=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=(1,1,1)$$

$$S_x=(1,0,-1)\qquad x\in[0,3]$$
$$S_y=(0,1,-1)\quad y\in[0,3-x]$$

Polo tanto:

$$\iint_S FdS=\int_0^3\int_0^{3-x}(x,y,3-x-y)\cdot(1,1,1)dydx=$$

$$F(S(x,y))=(x,y,3-x-y)$$

$$=\int_0^3\int_0^{3-x}(\cancel{x}+\cancel{y}+3-\cancel{x}-\cancel{y})dydx=3\int_0^3\int_0^{3-x}dydx=$$

$$3\int_0^3 y\Big|_0^{3-x}dx=3\int_0^3(3-x)dx=3\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)_0^3=$$

$$=3\left(9-\frac{9}{2}\right)=\left(27-\frac{27}{2}\right)=\frac{27}{2}$$

jmrivas Academia
Esta obra está sujeta a la licencia Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/.