MATEMÁTICAS II. GRAO EN ENXEÑERÍA CIVIL

Examen 22-03-2012 Tipo D.

1.- En las operaciones que se muestran a continuación, suponiendo que $\vec{r},\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vértices de $\mathbb{R}^3$, ¿ Qué operaciones tienen sentido?

$$\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\cdot\vec{w} \qquad \vec{u}\times\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right) \qquad \left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\vec{w} \qquad \left(\vec{r}\times\vec{u}\right)\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$$

$$\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\vec{w} \qquad \vec{u}\times\left(\vec{v}\times\vec{w}\right) \qquad \left\|\vec{u}\right\|\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right) \qquad \left(\vec{r}\times\vec{u}\right)\times\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)$$

2.- ¿A qué cónica corresponde la ecuación $4x^2-16x-y^2-2y-21=0$? Dibújala.

3.- Indica si son parábolas, hipérbolas, elipses, circunferencias o ninguna de ellas:

$$2x+2y^2=1$$
$$2x^2+y^2=1$$
$$2x^2-2y^2=1$$
$$2x^2-2y^2=-1$$
$$2x^2+2y^2=1$$
$$x^2+2\cdot y^2=1$$
$$2x+2y=1$$
$$2x^2+2y=1$$
$$2x-2y=1$$

4.- Escribe la ecuación continua de la intersección de los planos $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+3z=1 \end{cases}$

5.- Pasa la ecuación de la cuádrica $x^2+y^2+4z^2=1$ a coordenadas cilíndricas y esféricas.

6.- Calcula el dominio de la función $f(x,y)=\dfrac{\ln\left(1-y^2\right)}{x^2+y^2+1}$. Halla el interior y la frontera del dominio.

7.- El dominio de la función del problema anterior es:

a) Abierto b) Cerrado c) Abierto y cerrado d) Ni abierto ni cerrado

8.- Dada la función $f(x,y) = y \cdot sen\left(\frac{y}{x}\right)$, calcula:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

9.- Considera el tronco de un árbol como un cilindro circular recto. Suponiendo que el diámetro crece a razón de 2cm año, y la altura crece a razón de 6 cm año, ¿a qué velocidad está creciendo el volumen en el instante en que el árbol tiene 20 cm de diámetro y 100 cm de altura?

10.- Obtén los puntos críticos de la función $f(x,y) = y^3 + x^3 + 3x^2 - 3y^2 - 9x$. Clasifícalos.

Problema 1 **¿Qué operaciones tienen sentido?**

$\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\cdot\vec{w}$: $\vec{u}\cdot\vec{v}$ es un escalar, y **no puedo multiplicar** escalarmente un número por el vector $\vec{w}$.

$\vec{u}x\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)$: $\vec{v}\cdot\vec{w}$ es un escalar, y **no tiene sentido** multiplicarlo vectorialmente por un vector.

$\left(\vec{u}x\vec{v}\right)\cdot\vec{w}$: $\vec{u}x\vec{v}$ es un vector, así que multiplico escalarmente dos vectores, y obtengo un **número**.

$\left(\vec{r}x\vec{u}\right)\cdot\left(\vec{v}x\vec{w}\right)$: los productos vectoriales son vectores, y al multiplicarlos escalarmente obtengo un **número**.

$\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\vec{w}:\vec{u}\cdot\vec{v}$ es un escalar, y al multiplicar por $\vec{w}$ nos queda un **vector** . (Ojo: no es producto escalar, sino producto ordinario de un número por un vector).

$\vec{u}x\left(\vec{v}x\vec{w}\right)$: $\vec{v}x\vec{w}$ es un vector, y el producto vectorial de dos vectores es otro **vector**.

$\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left(\vec{v}\,x\,\vec{w}\right)$: Tanto la norma como el producto escalar son números, y su producto es un **<u>número</u>**.

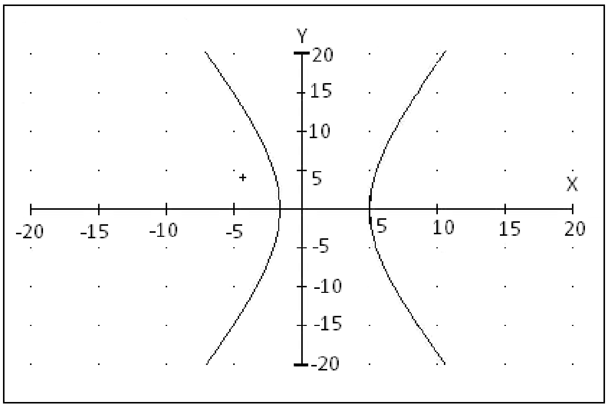
$\left(\vec{r}\cdot\vec{u}\right)x\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)$ Los productos escalares son números, y **<u>no se puede multiplicar vectorialmente</u>** dos números.

<u>Problema 2</u>

$$4x^2-16x-y^2-2y-21=0\rightarrow 4x^2-16x+16-y^2-2y-1-21=16-1\rightarrow$$

$$\rightarrow 4\cdot\left(x^2-4x+4\right)-\left(y^2+2y+1\right)=36\rightarrow 4\left(x-2\right)^2-\left(y+1\right)^2=36\rightarrow\frac{\left(x-2\right)^2}{9}-\frac{\left(y+1\right)^2}{36}=1$$

Es una hipérbola.



<u>Problema 3</u>

$$2x-2y^2=1\rightarrow x=\frac{1-2y^2}{2}$$

Es una parábola.

$$x^2-2\cdot y^2=1\rightarrow x^2=\frac{y^2}{1/2}$$

Es una elipse.

$$2x^2+y^2=1\rightarrow\frac{x^2}{1/2}+y^2=1$$

Es una elipse.

$$2x+2y=1\to y=\frac{1}{2}-x$$ Es una recta.

$$2x^2-2y^2=1\to \frac{x^2}{1/2}-\frac{y^2}{1/2}=1$$ Es una hipérbola.

$$2x^2+2y=1\to y=\frac{1}{2}-x^2$$ Es una parábola.

$$2x^2-2y^2=-1\to y=\frac{x^2}{1/2}-\frac{y^2}{1/2}=-1$$ Es una hipérbola.

$$2x-2y=1\to y=x-\frac{1}{2}$$ Es una recta.

$$2x^2+2y^2=1\to x^2+y^2=\frac{1}{2}$$ Es una circunferencia.

Problema 4

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x-y+3z=1 \end{cases}$$

Haciendo $z=t,\begin{cases} x+y-t=2\to y=2+t-x \\ 2x-y+3t=1 \end{cases}$ y sustituyendo en la segunda ecuación:

$$2x-(2+t-x)+3t=1\to 3x=3-2t\to x=\frac{3-2t}{3}=1-\frac{2t}{3}$$

Vuelvo a la primera ecuación:

$$y=2+t-\left(1-\frac{2t}{3}\right)=1+\frac{5t}{3}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\left.\begin{array}{c} x = 1 - \dfrac{2t}{3} \rightarrow t = \dfrac{x-1}{-2/3} \\ y = 1 + \dfrac{5t}{3} \rightarrow t = \dfrac{y-1}{5/3} \\ z = t \rightarrow t = z \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-1}{-2/3} = \frac{y-1}{5/3} = z$$ Ecuación continua de la recta.

Problema 5

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$$

Coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

Sustituyendo en la cuádrica:

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 1 \rightarrow \rho^2 + 4z^2 = 1 \rightarrow \rho^2 = 1 - 4z^2$$

Coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cdot \cos\varphi \end{cases} \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$ Sustituyendo en la cuádrica:

$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 1 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 3z^2 = 1 \rightarrow \rho^2 + 3\rho^2 \cos^2\varphi = 1 \rightarrow \rho^2\left(1 + 3\cos^2\varphi\right) = 1 \rightarrow$$

$$\rho^2 = \frac{1}{1 + 3\cos^2\varphi}$$

Problema 6

$$f(x,y)=\frac{\ln\left(1-y^2\right)}{x^2+y^2+1^2}$$

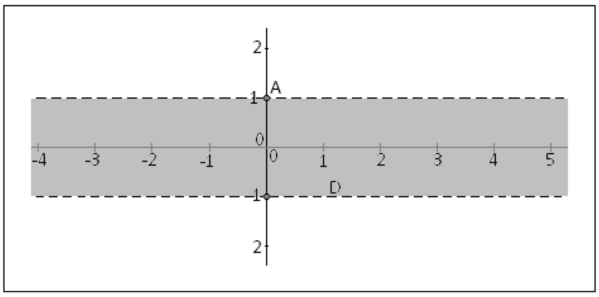
Para hallar el dominio, hay que tener en cuenta:

i.- Es un cociente, pero el denominador no se anula nunca, así que no hay problema.

ii.- De $\ln\left(1-y^2\right): 1-y^2>0 \rightarrow y^2<1 \rightarrow -1<y<1$

Entonces, $\text{Dom } f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tales que } -1<y<1\right\}$

$$\text{Int}\left(\text{Dom } f\right)=\text{Dom } f$$



$$\text{Fr}\left(\text{Dom } f\right)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tales que } y=-1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tales que } y=1\right\}$$

Problema 7

El conjunto es abierto, porque $\text{Int}\left(\text{Dom } f\right)=\text{Dom } f$

Problema 8

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} y\cdot \text{sen}\left(\frac{x}{y}\right)\right)=\lim_{x\to 0}\left(0\cdot \text{sen}\left(\frac{0}{x}\right)\right)=0$$

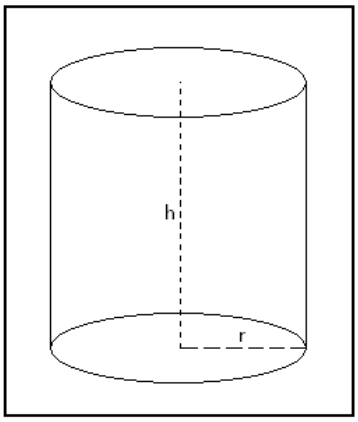
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} y\cdot \text{sen}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$ no existe.

Problema 9

La función que nos da el volumen del cilíndro es $\mathbf{V}(\mathbf{r},\mathbf{h})=\pi\cdot\mathbf{r}^2\cdot\mathbf{h}$

Para calcular la variación de volumen tenemos que usar la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}+\frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt}$$



Hallamos las derivadas parciales del volumen:

$$\frac{dV}{dr}=2\pi rh \qquad \frac{dV}{dh}=\pi\cdot r^2$$

El problema nos dice como varía radio y altura respecto al tiempo:

$$\frac{dr}{dt}=1 \qquad \frac{dh}{dt}=6$$

Por lo tanto, $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt}+\frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt}=2\pi rh\cdot 1+\pi\cdot r^2\cdot 6=2\pi rh+6\pi r^2$

Y cuando $r=10$ y $h=100$, $\frac{dV}{dt}=2\pi\cdot 10\cdot 100+6\pi 10^2=2600\pi$

Problema 10

$$f(x,y)=y^3+x^3+3x^2-3y^2-9x$$

Puntos críticos:

$$\nabla f(x,y)=(0,0)\rightarrow\begin{cases}\frac{df}{dx}=3x^2+6x-9=0\rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot 3\cdot(-12)}}{2\cdot 3}=\begin{cases}x=1\\x=-3\end{cases}\\ \frac{df}{dy}=3y^2+6y=0\rightarrow 3y\cdot(y-2)=0\rightarrow\begin{cases}y=0\\y=2\end{cases}\end{cases}$$

Puntos críticos: $(1,0)$; $(1,2)$; $(-3,0)$; $(-3,2)$

Clasifico los puntos críticos con el criterio del determinante hessiano:

$$\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{f}}{\mathbf{dx}^2}=\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\left(\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}\right)=6\mathbf{x}+6$$

$$\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{f}}{\mathbf{dydx}}=\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dy}}\left(\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dx}}\right)=0$$

$$\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{f}}{\mathbf{dy}^2}=\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dy}}\left(\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dy}}\right)=6\mathbf{y}-6$$

El determinante hessiano es: $\mathbf{Hf}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\begin{vmatrix}6\mathbf{x}+6 & 0\\ 0 & 6\mathbf{y}-6\end{vmatrix}$

Evalúo el hessiano en los puntos críticos:

En $(1,0)$ $\quad \mathbf{Hf}(1,0)=\begin{vmatrix}12 & 0\\ 0 & -6\end{vmatrix}=-72<0$ $\mathbf{f}$ tiene un punto de silla en $(1,0)$

En $(1,2)$ $\quad \mathbf{Hf}(1,2)=\begin{vmatrix}12 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}=72>0$ y como $\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{f}}{\mathbf{dx}^2}(1,2)=12>0$ $\mathbf{f}$ tiene un mínimo relativo en $(1,2)$

En $(-3,0)$ $\quad \mathbf{Hf}(-3,0)=\begin{vmatrix}-12 & 0\\ 0 & -6\end{vmatrix}=72>0$ y como $\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{f}}{\mathbf{dx}^2}(1,2)=-12<0$ $\mathbf{f}$ tiene un máximo relativo en $(-3,0)$

En $(-3,2)$ $\quad \mathbf{Hf}(-3,2)=\begin{vmatrix}-12 & 0\\ 0 & 6\end{vmatrix}=-72<0$ $\mathbf{f}$ tiene un punto de silla en $(-3,2)$.