3. Calcular f(x) sabiendo que $f''(x) = x\ln x$, f(x) pasa por el punto $\left(e, \frac{e}{4}\right)$ y tiene una tangente horizontal en x = 1.

Hallamos la primera derivada:

$$f'(x) = \int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$u = \ln x \to du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = xdx \to v = \frac{x^2}{2}$$

Sabiendo que tiene tangente horizontal en x = 1.

$$f'(1) = 0 \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

Hallamos f:

$$f(x) = \int\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}\right)dx = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}x + K$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$$

$$u = \ln x \to du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = x^2 dx \to v = \frac{x^3}{3}$$

Utilizando que pasa por $\left(e, \frac{e}{4}\right) \Rightarrow f(e) = \frac{e}{4}$

$$f(e) = \frac{e^3}{6}\ln e - \frac{e^3}{18} - \frac{e^3}{12} + \frac{1}{4}e + K = \frac{e}{4} \Rightarrow K = -\frac{e^3}{36}$$

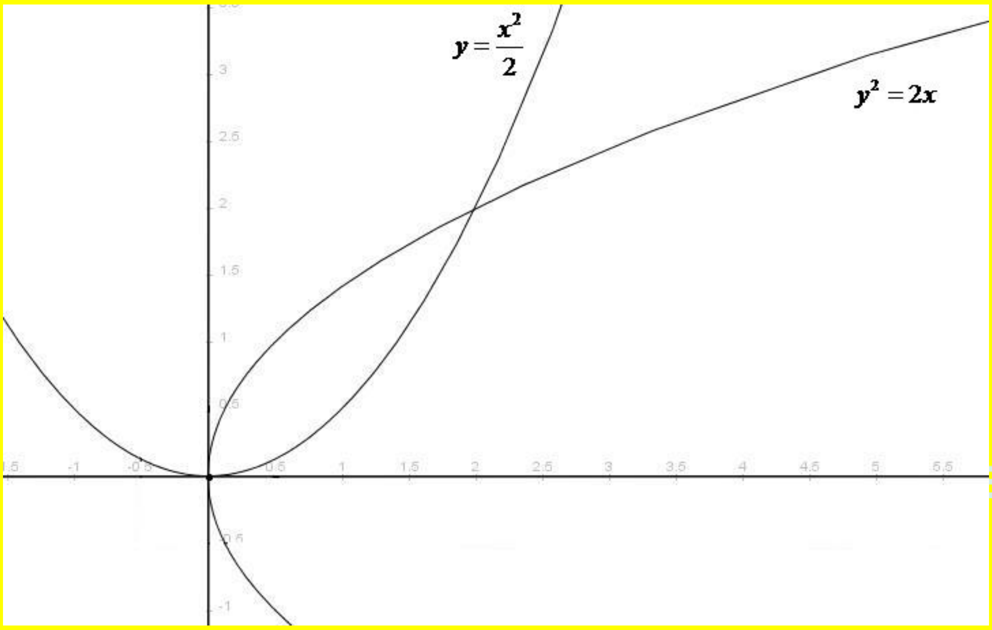
Por tanto:

$$f(x) = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^3}{12} + \frac{1}{4}x - \frac{e^3}{36}$$

4. Calcular el área del recinto definido por las parábolas $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y^2=2x$, la recta de ecuación; x = 3 y el origen de coordenadas. (Dibujar previamente las gráficas)

Hallamos los puntos de corte de las curvas:

$$\sqrt{2x}=\frac{x^2}{2}\Rightarrow 2x=\frac{x^4}{4}\Rightarrow x^4-8x=0\Rightarrow x(x^3-8)=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$



Por tanto:

$$\int_2^3\left(\frac{x^2}{2}-\sqrt{2x}\right)dx=\frac{x^3}{6}-\sqrt{2}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^3=\frac{x^3}{6}-2\sqrt{2}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_2^3=\frac{9}{2}-2\sqrt{2}\,\frac{3^{\frac{3}{2}}}{3}-$$

$$-\left(\frac{4}{3}-2\sqrt{2}\,\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}\right)=\frac{35}{6}-2\sqrt{6}$$