1. a) Definición de primitiva de una función en un intervalo. Definición de integral indefinida de una función en un intervalo. Propiedades de la integral indefinida.

   b) Dada la función $F(x)=\int_0^{x^2}\frac{1}{t^4+1}dt$, justificar (sin calcular el valor de la integral) la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   I. $F'(0)=-1$ (Falso, $F'(0)=0$)

   II. F(x) es creciente en el intervalo (0,7). (Verdadero)

   III. F(x) alcanza un máximo relativo en x = 0. (Falso, mínimo en x = 0)

   IV. F(x) es cóncava en el intervalo $(0,+\infty)$

2. $\int\left(\frac{x-x^3}{1+x^4}+\frac{1}{x\ln x}\right)dx$

$$\int\left(\frac{x-x^3}{1+x^4}+\frac{1}{x\ln x}\right)dx=\int\left(\frac{x}{1+x^4}-\frac{x^3}{1+x^4}+\frac{1}{x\ln x}\right)dx$$

$$\int\frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+\left(x^2\right)^2}dx=\frac{1}{2}arctgx^2+C$$

$$\int\frac{x^3}{1+x^4}dx=\frac{1}{4}\int\frac{4x^3}{1+x^4}dx=\frac{1}{4}ln(1+x^4)+C$$

$$\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{1/x}{\ln x}dx=ln\left(\ln x\right)+C$$

Por tanto:

$$\int\left(\frac{x-x^3}{1+x^4}+\frac{1}{x\ln x}\right)dx=\frac{1}{2}arctgx^2-\frac{1}{4}ln(1+x^4)+ln\left(\ln x\right)+C$$

3. $\int\frac{dx}{e^{2x}-3e^x}$

Hacemos el cambio de variable :

$$e^x=t$$

$$e^x dx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}$$

$$\int\frac{dx}{e^{2x}-3e^x}=\int\frac{1}{t^2-3t}\frac{dt}{t}$$

$$\frac{1}{t^2(t-3)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t-3}$$

$$1=t(t-3)A+B(t-3)+t^2C$$

- $t=3 \Rightarrow 1=9C \Rightarrow C=\frac{1}{9}$
- $t=0 \Rightarrow 1=-3B \Rightarrow B=-\frac{1}{3}$
- $t=1 \Rightarrow 1=-2A-2B+C \Rightarrow A=-\frac{1}{9}$

$$\int \frac{1}{t^2-3t}\frac{dt}{t}=\int \frac{-\frac{1}{9}}{t}+\frac{-\frac{1}{3}}{t^2}+\frac{\frac{1}{9}}{t-3}dt=-\frac{1}{9}lnt+\frac{1}{3}t^{-1}+\frac{1}{9}ln(t-3)+C=-\frac{1}{9}lne^x+\frac{1}{3}e^{-x}+\frac{1}{9}ln\left(e^x-3\right)+C=\frac{1}{9}\left(-x+3e^{-x}+ln\left(e^x-3\right)\right)+C$$

4. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tg^3x\,dx$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tg^3x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgx\,tg^2x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgx\left(1+tg^2x-1\right)dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[tgx\left(1+tg^2x\right)-tgx\right]dx=\left.\frac{tg^2x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+\left.ln\cos x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{tg^2\frac{\pi}{4}}{2}-\frac{tg^2\frac{-\pi}{4}}{2}+ln\cos\tfrac{\pi}{4}-ln\cos\tfrac{-\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+ln\frac{\sqrt{2}}{2}-ln\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

5. $\int x^2sen^2xdx$

$x^2=u \Rightarrow 2xdx=du$

$sen^2xdx=dv \Rightarrow v=\int sen^2xdx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}x-\frac{sen2x}{4}$

$$\int x^2sen^2xdx=x^2\left(\frac{1}{2}x-\frac{sen2x}{4}\right)-\int\left(\frac{1}{2}x-\frac{sen2x}{4}\right)2xdx=\frac{x^3}{2}-\frac{x^2}{4}sen2x-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\int xsen2xdx$$

$x=u \Rightarrow dx=du$

$sen2xdx=dv \Rightarrow v=\frac{-\cos 2x}{2}$

$$\int xsen2xdx=\frac{-x\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=\frac{-x\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}sen2x$$

Por tanto:

$$\int x^2sen^2xdx=x^2\left(\frac{1}{2}x-\frac{sen2x}{4}\right)-\int\left(\frac{1}{2}x+\frac{sen2x}{4}\right)2xdx=\frac{x^3}{2}-\frac{x^2}{4}sen2x-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{-x\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}sen2x\right)+C=$$

$$=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}sen2x+\frac{1}{8}sen2x-\frac{1}{4}x\cos 2x+C$$

6. Sea $y=(ax-1)e^{ax}\quad a>0$. Calcular a sabiendo que el recinto definido por los ejes de coordenadas , la gráfica de la función dada y el punto donde esta corta al eje X tiene 1 cm^2 de área. (Es imprescindible representar gráficamente el recinto. Para representar la función dada calcular: cortes con los ejes, asíntotas, monotonía y extremos)

Puntos de corte:

$$x = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$y = 0 \Rightarrow (ax-1)e^{ax} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales: No tiene.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} (ax-1)e^{ax} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (ax-1)e^{ax} = 0$$

Asíntotas oblicuas: No tiene.

Monotonía y extremos

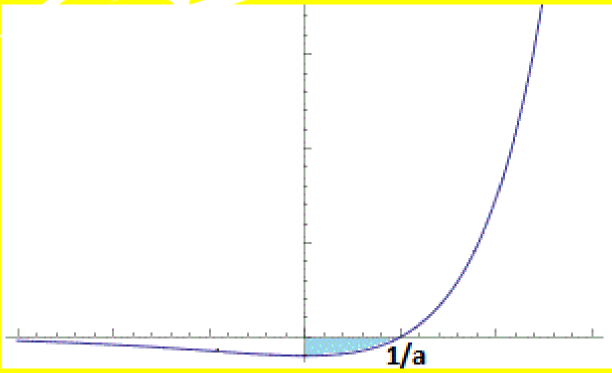
$$y' = ae^{ax} + (ax-1)ae^{ax} = 0 \Rightarrow ae^{ax}(1+ax-1) = 0 \Rightarrow a^2e^{ax}x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$y' < 0$ | $y' > 0$

0

Por tanto, en el punto $(0,-1)$ hay un mínimo relativo.

Representamos la función (El área que describe el problema es la región pintada de azul)



Por tanto:

$$\int_0^{1/a} (ax-1)e^{ax}dx = 1$$

$$u = ax-1 \Rightarrow du = adx \Rightarrow dx = \frac{du}{a}$$

$$dv = e^{ax}dx \Rightarrow v = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$A=\int_0^{1/a}-(ax-1)e^{ax}dx=-\frac{(ax-1)}{a}e^{ax}\Big]_0^{1/a}+\int_0^{1/a}e^{ax}dx=-\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}e-\frac{1}{a}\right)=-\frac{2}{a}+\frac{1}{a}e=1\Rightarrow a=e-2$$

7. Calcular el área del recinto limitado por la curva $y^2=4x$ y la recta normal a dicha curva en $y=2$. (Es imprescindible representar gráficamente el recinto)

Observación: $y^2=4x$ se corresponde con dos funciones.

Derivamos y hallamos la pendiente de la recta tangente a la curva en y = 2:

$$2yy'=4\Rightarrow y'=\frac{4}{2y}\xrightarrow{y=2}y'=\frac{4}{4}=1$$

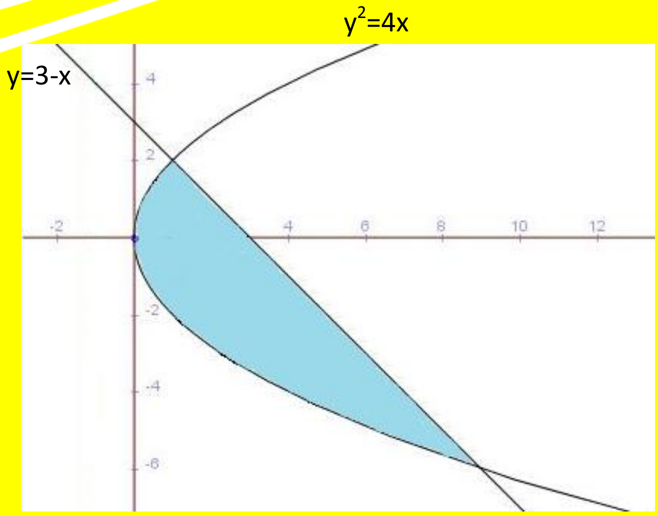
Por tanto, la recta normal tiene pendiente $m=-\frac{1}{1}=-1$ y pasa por el punto $y=2\Rightarrow x=1$.

La ecuación de la recta normal viene dada por:

$$y-2=-1(x-1)\Rightarrow y=3-x$$

Hallamos los puntos de corte de la recta con la curva:

$$\left.\begin{array}{l}y=3-x\\ y^2=4x\end{array}\right\}\Rightarrow(3-x)^2=4x\Rightarrow x^2-10x+9=0\Rightarrow\begin{cases}x=9\\ x=1\end{cases}$$



Por tanto, el área viene dada por:

$$\int_{-6}^{2}\left((3-y)-\frac{y^2}{4}\right)dy=3y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{12}\Big]_{-6}^{2}=\frac{64}{3}$$