MATEMÁTICAS II

(El alumno/a debe responder solamente a los ejercicios de una de las opciones. Puntuación máxima de los ejercicios de cada opción: ejercicio 1= 3 puntos, ejercicio 2= 3 puntos, ejercicio 3= 2puntos, ejercicio 4= 2puntos)

OPCIÓN A

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sean B^t la matriz traspuesta de B e I la matriz identidad de orden 3.

a) Estudia, según los valores del parámetro λ, el rango de $AB^t + \lambda I$.

b) Calcula la matriz X que verifica: $AB^tX - X = 2B$

2. Dados el plano $\pi: x + y - z - 1 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0 \\ 2x + y \quad - 2 = 0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de r y π. Calcula la distancia de r a π.

b) Calcula la ecuación general o implícita del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

3. a) Enuncia el teorema de Bolzano.¿Tiene la ecuación $x^3 + 2x - 2 = 0$ alguna solución en el intervalo $(0,1)$? ¿Tiene esta ecuación más de una solución real?

b) Calcula los valores de a y b para que $\lim_{x\to 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - e^{2x}}{sen(x^2)} = 1$

4. a) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

b) Dibuja y calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ y la bisectriz del primer cuadrante. (Nota: para el dibujo de la gráfica de $f(x)$, es suficiente utilizar el apartado anterior y calcular los puntos de corte con los ejes).

OPCIÓN B

1. a) Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

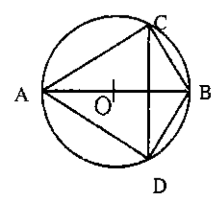
$$\begin{aligned} x + my + z &= 2 \\ mx - y + z &= 0 \\ 2x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

b) Resuelve, si es posible, el sistema anterior para el caso $m = 1$.

2. a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano π determinado por los puntos $A(1,0,2)$, $B(2,1,3)$ y $C(3,0,0)$.

b) Calcula los posibles valores de a para que el punto $P(a, a, a)$ equidiste de la recta r y del plano π del apartado anterior.

3. En una circunferencia de centro O y radio 10 cm. se traza un diámetro AB y una cuerda CD perpendicular a ese diámetro. ¿A qué distancia del centro O de la circunferencia debe estar la cuerda CD, para que la diferencia entre las áreas de los triángulos ADC y BCD sea máxima?



4. a) Enuncia el teorema de Rolle. Determina el valor de a para que sea aplicable el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^3 + ax - 1$ en el intervalo $[0,1]$. Para este valor de a, calcula un punto $c \in (0,1)$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ sea paralela al eje OX.

b) Calcula $\int \frac{x^3+3}{x^2 - x} dx$